



Wintersemester 2010/2011

H. Donder, A. Fackler, P. Garcia

Analysis III Tutorium

Blatt 3

Aufgabe 3.1. Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $f: A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $f \geq 0$ eine stetige Funktion die integrierbar ist. Wenn $\int_A f dx = 0$, dann $f = 0$.

Aufgabe 3.2. Sei $f: [0, 1] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $g: [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ die Funktionen

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \quad g(x, y) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Sind f und g integrierbar?

Aufgabe 3.3. Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a < b$, $c < d$ und $Q := [a, b] \times [c, d]$. Weiterhin, seien $f: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $g: [c, d] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Dann

1. $\int_Q f(x)g(y)d(x, y) = \left[\int_a^b f(x)dx \right] \left[\int_c^d g(x)dx \right]$.
2. $\int_Q (f(x) + g(y))d(x, y) = (d - c) \int_a^b f(x)dx + (b - a) \int_c^d g(x)dx$

Aufgabe 3.4. Seien $R := [-1, 1] \times [0, 1]$ und $S = [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{\pi}{2}]$.

1. Berechnen Sie $\int_S \cos x \cdot \sin y$.
2. Berechnen Sie $\int_R (x^2 + y^2)d(x, y)$.



Wintersemester 2010/2011

H. Donder, A. Fackler, P. Garcia

Analysis III Tutorium

Lösungsskizze Blatt 3

Aufgabe 3.1.

Nehmen wir an, dass $f(a) > 0$ für irgendeine $a \in A$. Da A offen und f stetig, dann existiert ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ so dass $B_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| < \varepsilon\} \subset A$ und $f(x) > 0$ für alle $x \in B_\varepsilon(a)$.

Sei $Q \neq \emptyset$ eine offene Quader so dass $a \in \overline{Q} \subset B_\varepsilon(a)$, wo $\overline{Q}$ der Abschluss von Q ist. Da $\overline{Q}$ kompakt, dann $\mu := \min \{f(x) \mid x \in \overline{Q}\} > 0$ existiert. Dann $f \geq \mu 1_{\overline{Q}}$ und deswegen $\int f dx \geq \int \mu 1_{\overline{Q}} dx = \mu \cdot v(\overline{Q}) > 0$.

Aufgabe 3.2.

Wir zeigen erst dass $\|f\|_1 = 0$. (!)

Sei $l: \mathbb{N} \setminus \{0\} \rightarrow [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ eine Aufzählung der rationalen Zahlen im Intervall $[0, 1]$.

Sei $\varepsilon > 0$. Für $i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, sei $A(i) := \{x \in \mathbb{R} \mid \|x - l(i)\| < \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}\}$.

Sei $\varphi_\varepsilon(x) := \sum_{i=0}^{\infty} 1_{A(i)}$. Dann φ_ε ist eine Hüllreihe von f und $I(\varphi_\varepsilon) = \sum_{i=1}^{\infty} v(A(i)) = \sum_{i=1}^{\infty} |l(i) + \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} - (l(i) - \frac{\varepsilon}{2^{i+1}})| = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} = \varepsilon \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \varepsilon$.

Da das vorherige für beliebiges ε gemacht wurde, dann $\|f\|_1 = \inf \{I(\varphi) \mid \varphi \text{ ist Hüllreihe von } f\} = 0$.

Auf der anderen Seite, für $k \in \mathbb{N}$, sei $f_k: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f_k(x) := 0$. Dann $\forall k \in \mathbb{N}$ f_k ist eine Treppenfunktion und $\|f - f_k\|_1 = \|f\|_{1, \text{nach (!)}} = 0$. Deswegen $\lim_{k \rightarrow \infty} \|f - f_k\|_1 = 0$.

Also, f ist integrierbar.

Der Beweis dass g integrierbar ist, ist genau so wie der Beweis dass f integrierbar ist.

Aufgabe 3.3. Es sei $X := [a, b]$ und $Y := [c, d]$. Dann

1.

$$\begin{aligned} \int_Q f(x)g(y)dx dy &\stackrel{\text{Vorlesungs Lemma 17}}{=} \int_Y \left[\int_X f(x)g(y)dx \right] dy \stackrel{\text{linearität}}{=} \int_Y g(y) \left[\int_X f(x)dx \right] dy = \\ &\stackrel{\text{linearität}}{=} \left[\int_X f(x)dx \right] \left[\int_Y g(y)dy \right] \stackrel{\text{nach * und Vorlesungs Satz 10}}{=} \left[\int_a^b f(x)dx \right] \left[\int_c^d g(y)dy \right] = \\ &\left[\int_a^b f(x)dx \right] \left[\int_c^d g(x)dx \right]. \end{aligned}$$

* Da f und g stetige Funktionen in kompakte Intervalle sind, dann sind f und g Regelfunktionen (Analysis I).

$$\begin{aligned}
2. \quad \int_Q (f(x) + g(y))d(x, y) &\stackrel{\text{linearit\"at}}{=} \int_Q f(x)d(x, y) + \int_Q g(y)d(x, y) \stackrel{\text{nach 1.}}{=} \\
&= \left[\int_a^b f(x)dx \right] \left[\int_c^d 1dx \right] + \left[\int_a^b 1dx \right] \left[\int_c^d g(x)dx \right] = (d - c) \int_a^b f(x)dx + (b - a) \int_c^d g(x)dx
\end{aligned}$$

Aufgabe 3.4. Man soll die Formeln von Aufgabe 3.3 benutzen. Die Ergebnisse sind:

$$\int_S \cos x \cdot \sin y \, d(x, y) = 1.$$

$$\int_R (x^2 + y^2) d(x, y) = \frac{4}{3}$$